

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) Dada la función  $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$ , se pide:

- a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de f(x).
- b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de f(x).

-----

a)

Las asíntotas son las siguientes:

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$2x = 0$  ;;  $x = 0$  (El eje de ordenadas es asíntota vertical)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty \Rightarrow \downarrow.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \Rightarrow \uparrow.$$

Oblicuas: son de la forma  $y = mx + n$ , siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x^2} = \underline{2 = m}.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{2x} = \frac{3}{2} = n.$$

$$\underline{\underline{\text{Asíntota oblicua: } y = 2x + \frac{3}{2}}}$$

b)

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{(8x+3) \cdot 2x - (4x^2+3x+4) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{16x^2+6x-8x^2-6x-8}{4x^2} = \frac{8x^2-8}{4x^2} = \frac{8(x^2-1)}{4x^2} = f'(x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8(x^2-1)}{4x^2} = 0 \;; \; 8(x^2-1) = 0 \;; \; x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -1} \;; \; \underline{x_2 = 1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{16x \cdot 4x^2 - 8(x^2-1) \cdot 8x}{(4x^2)^2} = \frac{64x^3 - 64x^3 + 64x}{4x^4} = \frac{64x}{4x^4} = \frac{16}{x^3} = f''(x).$$

$$f''(-1) = \frac{16}{(-1)^3} = \frac{16}{-1} = -16 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = -1}.$$

$$f(-1) = \frac{4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 4}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 - 3 + 4}{-2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } A\left(-1, -\frac{5}{2}\right)}}.$$

$$f''(1) = \frac{16}{1^3} = \frac{16}{1} = 16 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = 1}.$$

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 3 + 4}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } B\left(1, \frac{11}{2}\right)}}.$$

\*\*\*\*\*



3º) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial:  $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$ .

b) Encuentra una fórmula general para  $B^n$ , donde  $n \in N$ . (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz B).

-----

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ -2X - 2Y = -2B \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Y = A - 2B} \;; \; X = B - Y = B - A + 2B = \underline{-A + 3B = X}.$$

$$X = -A + 3B = -\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = X}}.$$

$$Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = Y}}.$$

b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{I = B^2}.$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = \underline{B = B^3}.$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = \underline{I = B^4}.$$

.....

$$\underline{\underline{B^n = I \text{ si } n \text{ es par} \;; \; B^n = B \text{ si } n \text{ es impar}}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Consideramos el plano  $\pi \equiv x - z = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in R.$

a) Determina el parámetro  $a \in R$  para que la recta  $r$  y el plano  $\pi$  sean paralelos.

b) Para el valor de  $\alpha$  determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta  $r'$  paralela al plano  $\pi$  y que corte perpendicularmente a  $r$  en el punto  $P(1, 1, 0)$ .

-----

a)

Para que la recta  $r$  y el plano  $\pi$  sean paralelos es condición suficiente que el vector normal del plano sea perpendicular al vector director de la recta.

El vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, 0, -1)$  y el vector director de  $r$  es  $\vec{v} = (a, -1, 2)$ .

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, 0, -1) \cdot (a, -1, 2) = 0 \;; \; a - 0 - 2 = 0 \;; \; a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  son paralelos cuando  $\alpha = 2$ .

b)

Un vector director de  $r$  es  $\vec{v} = (2, -1, 2)$  y el haz de planos perpendiculares a la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$  tiene por expresión general  $\alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0$ .

De los infinitos planos del haz anterior, el plano  $\beta$  que contiene al punto  $P(1, 1, 0)$  es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \;; \; 2 - 1 + D = 0 \;; \; 1 + D = 0 \;; \; \underline{D = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0}.$$

El haz de planos paralelos a  $\pi \equiv x - z = 0$  tiene por expresión  $\gamma \equiv x - z + D = 0$ .

De los infinitos planos del haz anterior, el plano  $\mu$  que contiene al punto  $P(1, 1, 0)$  es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x - z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \;; \; 1 + D = 0 \;; \; \underline{D = -1} \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - z - 1 = 0}.$$

La recta  $r'$  es la intersección de los planos  $\beta$  y  $\mu$ :  $r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ .

Para expresar  $r'$  por unas ecuaciones paramétricas hacemos lo siguiente:

$$r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;; \; x = 1 + z = \underline{1 + \lambda = x} \;; \; y = 2x + 2z - 1 = 2 + 2\lambda + 2\lambda - 1 =$$

$$\underline{= 1 + 4\lambda = y} \Rightarrow \underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

\*\*\*\*\*

## PROPUESTA B

1º) En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido  $C(t)$ , medida en litros, está determinada en función del tiempo  $t$ , medido en horas, por la siguiente expresión:  $C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$ ,  $t \in [1, 10]$ . Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre  $t = 1$  hora y  $t = 10$  horas.

-----

La cantidad mínima será el mínimo de la función  $C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$ :

$$C'(t) = 10 + \frac{0-10}{t^2} + \frac{0-240 \cdot 3t^2}{t^6} = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4} = \frac{10t^4 - 10t^2 - 720}{t^4} = 10 \cdot \frac{t^4 - t^2 - 72}{t^4}.$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 10 \cdot \frac{t^4 - t^2 - 72}{t^4} = 0 \quad ; ; \quad t^4 - t^2 - 72 = 0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$t^4 - t^2 - 72 = 0 \Rightarrow t^2 = y \Rightarrow y^2 - y - 72 = 0 \quad ; ; \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y_1 = 9} \quad ; ; \quad \underline{y_2 = -8}.$$

Deshaciendo el cambio de variable:  $\begin{cases} t^2 = 9 \Rightarrow \underline{t_1 = 3} \quad ; ; \quad \underline{t_2 = -3} \\ t^2 = -8 \Rightarrow t \notin R \end{cases}$ .

La solución del problema es  $\underline{t = 3}$ ; la solución  $t = -3$  carece de sentido lógico.

La cantidad de agua en estado líquido a las 3 horas es la siguiente:

$$C(3) = \frac{2}{3} + 10 \cdot 3 + \frac{10}{3} + \frac{240}{3^3} = \frac{2}{3} + 30 + \frac{10}{3} + \frac{80}{9} = \frac{6 + 270 + 30 + 80}{9} = \frac{386}{9} \cong \underline{42'89 \text{ litros}}.$$

La mínima cantidad en estado líquido son 42'89 litros a las tres horas.

\*\*\*\*\*

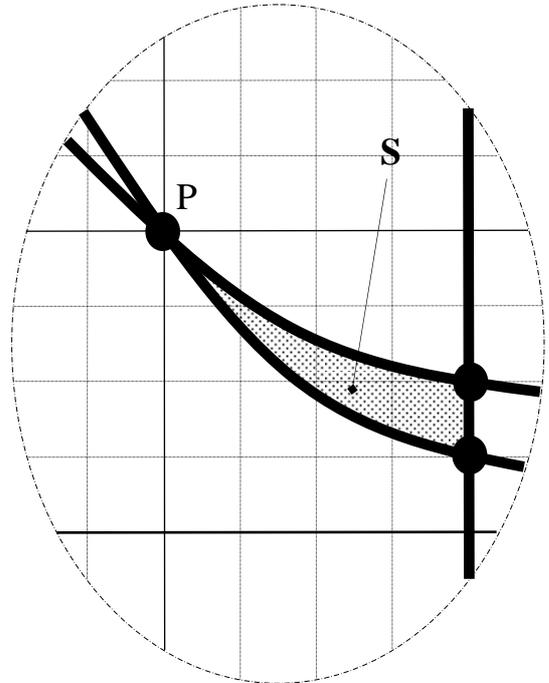
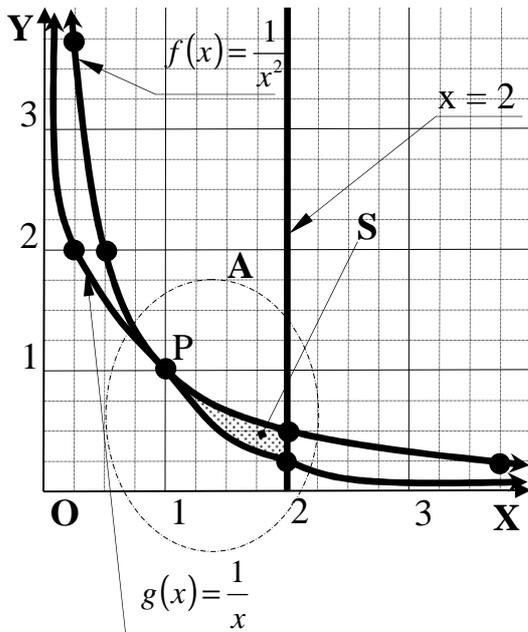
2º) a ) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones  $f(x)=\frac{1}{x}$  y  $g(x)=\frac{1}{x^2}$ , y la recta  $x = 2$ .

b ) Calcula el área de dicha región.

-----

a )

El punto de corte de las funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones:



Detalle A

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \quad ; ; \quad x^2 = x \quad ; ; \quad x^2 - x = 0 \quad ; ; \quad x(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad ; ; \quad \underline{x_2 = 1}.$$

Nótese que la solución  $x = 0$  tiene como valor de las funciones infinito, por lo cual el único punto real de corte es P(1, 1).

b )

Todas las ordenadas de la función  $f(x)$  son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función  $g(x)$  por lo que la superficie pedida es:

$$S = \int_1^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx = \left[ Lx - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[ Lx + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left( L2 + \frac{1}{2} \right) - \left( L1 + \frac{1}{1} \right) =$$

$$= L2 + \frac{1}{2} - L1 - 1 = \underline{\underline{\left( L2 - \frac{1}{2} \right) u^2 = S.}}$$

\*\*\*\*\*

3º) a) Clasifica, en función del parámetro  $\lambda \in R$ , el sistema 
$$\begin{cases} \lambda x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases} .$$

b) Resuélvelo, si es posible, para  $\lambda = 2$ .

-----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

El rango de M en función del parámetro  $\lambda$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 3 - 10 - 5 + 12 + \lambda = 3\lambda - 6 = 0 \quad ; \quad \lambda - 2 = 0 \quad ; \quad \underline{\lambda = 2} .$$

Para  $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

$$\text{Para } \lambda = 2 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2} .$$

Para  $\lambda = 2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

b)

$$\text{Para } \lambda = 2 \text{ el sistema es } \begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases} , \text{ que es compatible indeterminado.}$$

Para resolver el sistema despreciamos una de las ecuaciones (tercera) y parametizamos una de las incógnitas ( $z = \lambda$ ):

$$\left. \begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 + \lambda \\ 3x - y = 1 + \lambda \end{cases} \right\} \begin{cases} 2x + 2y = 2 + \lambda \\ 6x - 2y = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 8x = 4 + 3\lambda \quad ; \quad ;$$

$$\underline{x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda} \quad ; \quad y = 3x - z - 1 = \frac{3}{2} + \frac{9}{8}\lambda - \lambda - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda}} = y .$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

---

---

\*\*\*\*\*

4º) Dados los puntos de coordenadas A(0, 1, 0), B(1, 2, 3), C(0, 2, 1) y D(k, 1, 1), donde  $\lambda \in R$ :

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen volumen de  $5 u^3$ ?

-----

a)

Los puntos A(0, 1, 0), B(1, 2, 3) y C(0, 2, 1) determinan los vectores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , que son los siguientes:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (0, 1, 0) = (1, 1, 3).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 1) - (0, 1, 0) = (0, 1, 1).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} |i+k-3i-j| = \frac{1}{2} |-2i-j+k| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2} u^2 = S.}}$$

b)

Los puntos A(0, 1, 0) y D(k, 1, 1) determinan el vector :

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (k, 1, 1) - (0, 1, 0) = (k, 0, 1).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right| = 5 u^3 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |1+k-3k| = \frac{1}{6} \cdot |1-2k| = 5 \;; \; |1-2k| = 30 \;;$$

$$\left. \begin{array}{l} 1-2k = 30 \\ -1+2k = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -\frac{29}{2}}} \;; \; \underline{\underline{k_2 = \frac{31}{2}}}.$$

\*\*\*\*\*